مساله ۱)

الف)

$$f(x_i - \frac{h}{2}) = f(x_i) - f'(x_i)(\frac{h}{2}) + \frac{1}{2} f''(x_i)(\frac{h}{2})^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_i + t_1 h)(\frac{h}{2})^3, \qquad -\frac{1}{2} < t_1 < 0,$$

$$f(x_i + \frac{h}{2}) = f(x_i) + f'(x_i)(\frac{h}{2}) + \frac{1}{2} f''(x_i)(\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i + t_2 h)(\frac{h}{2})^3, \qquad 0 < t_2 < \frac{1}{2},$$

با کم کردن طرفین تساوی فوق از هم، داریم:

$$f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2}) = f'(x_i)h + \frac{1}{3!}(\frac{h}{2})^3 (f'''(x_i + t_1 h) + f'''(x_i + t_2 h)),$$

با توجه به قضیه مقدار میانی $t_1 < t < t_2$ یافت می شود که:

$$f'''(x_i + t_1 h) + f'''(x_i + t_2 h) = 2 f'''(x_i + th)$$

در نتیجه

$$f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2}) = f'(x_i)h + \frac{1}{3!}(\frac{h}{2})^3 2 f'''(x_i + th)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2})}{h} = f'(x_i) + \frac{h^2}{24} f'''(x_i + th)$$

$$\Rightarrow f'(x_i) - \frac{f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2})}{h} = -\frac{h^2}{24} f'''(x_i + th) = O(h^2)$$

ب)

مشابه قسمت قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_i = f(x_i + \frac{h}{2}) - f'(x_i + \frac{h}{2})(\frac{h}{2}) + \frac{1}{2} f''(x_i + \frac{h}{2})(\frac{h}{2})^2 - \frac{1}{3!} f'''(x_i + t_1 h)(\frac{h}{2})^3, & 0 < t_1 < \frac{1}{2}, \\ f_{i+1} = f(x_i + \frac{h}{2}) + f'(x_i + \frac{h}{2})(\frac{h}{2}) + \frac{1}{2} f''(x_i + \frac{h}{2})(\frac{h}{2})^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i + t_2 h)(\frac{h}{2})^3, & \frac{1}{2} < t_2 < 1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_i = f'(x_i + \frac{h}{2})h + \frac{1}{3!}(\frac{h}{2})^3 (f'''(x_i + t_2 h) + f'''(x_i + t_2 h))$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_i = f'(x_i + \frac{h}{2})h + \frac{1}{3!}(\frac{h}{2})^3 (2 f'''(x_i + th)), \qquad t_1 < t < t_2$$

$$\Rightarrow \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'(x_i + \frac{h}{2}) = \frac{h^2}{24} f'''(x_i + th)$$

$$\Rightarrow f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = -\frac{h^2}{24} f'''(x_i + th)$$

$$\Rightarrow f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2)$$

مساله ۲)

فرمول انتگرال‌گیری برای $f(x)=1$ دقیق است، زیرا:

$$\int_a^{a+h} dx = x\Big|_a^{a+h} = h$$

$$hf(a+h) - \frac{h^2}{2}f'(a) = h$$

فرمول انتگرال‌گیری برای $f(x)=x$ دقیق است، زیرا:

$$\int_a^{a+h} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^{a+h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{2} = \frac{h^2+2ah}{2}$$

$$hf(a+h) - \frac{h^2}{2}f'(a) = h(a+h) - \frac{h^2}{2} = \frac{h^2+2ah}{2}$$

به این ترتیب فرمول انتگرال‌گیری برای چندجمله‌ای‌های از درجه یک دقیق است.

با جایگذاری $f(x)=x^2$ در فرمول بالا، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^{a+h} f(x)dx = \int_a^{a+h} x^2dx = \dfrac{(a+h)^3-a^3}{3} = \dfrac{a^3+h^3+3ah^2+3a^2h-a^3}{3} = \dfrac{h^3}{3}+ah^2+a^2h \\ hf(a+h) - \dfrac{h^2}{2}f'(a) = h(a+h)^2 - \dfrac{h^2}{2}(2a) = h(a^2+h^2+2ah) - ah^2 = ha^2+h^3+ah^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \neq hf(a+h) - \frac{h^2}{2}f'(a).$$

که نشان می‌دهد، فرمول انتگرال‌گیری برای چندجمله‌ای ها با درجه حداکثر یک دقیق است.

مساله ۳)

الف)

توجه داریم:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (a+b\cos(x))dx = 2\pi a \\ f(0) = a+b \\ f(\pi) = a-b \end{cases}$$

با اعمال شرط $\int_0^{2\pi} f(x)dx = A_1f(0) + A_2f(\pi)$ داریم:

$$2\pi a = A_1(a+b) + A_2(a-b) \Rightarrow 2\pi a = (A_1+A_2)a + (A_1-A_2)b \Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2 = 2\pi \\ A_1-A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2 = \pi}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \left(a_k \cos(2k+1)x + b_k \sin kx\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{2k+1} \sin(2k+1)x - \frac{b_k}{k} \cos kx \right)_0^{2\pi} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} f(0) = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ f(\pi) = -\sum_{k=1}^{n} a_k \end{array}\right\} \Rightarrow 2(f(0) + f(\pi)) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x)dx = 2(f(0) + f(\pi))$$

مساله ۴)

ماتریس دوران قائم نرمال گیونز را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$Q = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}; \quad c = \cos\theta, \quad s = \sin\theta,$$

در نتیجه

$$Q^T A = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cw - sy & cx - sz \\ sw + cy & sx + cz \end{bmatrix}$$

برای آنکه $Q^T A$ متقارن باشد، باید داشته باشیم:

$$sw + cy = cx - sz \Rightarrow s(w+z) = c(x-y) \Rightarrow \frac{s}{c} = \frac{x-y}{w+z} \Rightarrow \tan\theta = \frac{x-y}{w+z}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\theta\right| = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}, \quad \left|\sin\theta\right| = \sqrt{\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\theta\right| = \frac{\left|w+z\right|}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}}, \quad \left|\sin\theta\right| = \frac{\left|x-y\right|}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{w+z}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}}, & s = \dfrac{x-y}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}} \\ c = \dfrac{-(w+z)}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}}, & s = \dfrac{-(x-y)}{\sqrt{(w+z)^2 + (x-y)^2}} \end{cases}$$

مساله ۵)

$$\min \varphi_2(\mathrm{x}) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2} \equiv \min \bar{\varphi}_2(\mathrm{x}) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2$$

$$\frac{d}{dx}\bar{\varphi}_2(\mathrm{x}) = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2(x-2) + 2(x-3) = 0 \Rightarrow x^* = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

یا اینکه

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\Rightarrow 3x=6\Rightarrow x=2$$

مساله ۶)

الف) از طرفین تساوی حد می‌گیریم:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3+3\alpha x_n}{3x_n^2+\alpha}\Rightarrow l=\frac{l^3+3\alpha l}{3l^2+\alpha}\Rightarrow 3l^3+\alpha l=l^3+3\alpha l\Rightarrow 2l^3-2\alpha l=0\Rightarrow 2l(l^2-\alpha)=0$$
$$\Rightarrow l=0,\pm\sqrt{\alpha}$$

ب) p را مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به l درنظر بگیرید:

$$x_{n+1}=g\left(x_n\right)$$
$$g'\left(x\right)=\frac{\left(3x^2+3\alpha\right)\left(3x^2+\alpha\right)-6\left(x^3+3\alpha x\right)x}{\left(3x^2+\alpha\right)^2}\Rightarrow g'\left(x\right)=\frac{3x^4-6\alpha x^2+3\alpha^2}{\left(3x^2+\alpha\right)^2},$$
$$g''(x)=\frac{\left(12x^3-12\alpha x\right)\left(3x^2+\alpha\right)^2-12x\left(3x^2+\alpha\right)\left(3x^4-6\alpha x^2+3\alpha^2\right)}{\left(3x^2+\alpha\right)^4}$$
$$l=\pm\sqrt{a}:\quad g'\left(l\right)=\circ,\ g''\left(l\right)=\circ,\ g'''\left(l\right)\neq\circ\Rightarrow p=3.$$
$$l=\circ:\quad g'\left(l\right)=3\neq\circ\Rightarrow p=1.$$

مساله ۷)

الف) توجه داریم:

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}y'(t,y(t))dt\Rightarrow y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,y(t))dt$$

و با استفاده از نمادگذاری $y_{n+1}=y(t_{n+1}),\quad y_n=y(t_n)$ داریم

$$y_{n+1}=y_n+\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,y(t))dt,\qquad (I)$$

اگر $f(t,y(t))$ را در نقطه‌ی t_n درونیابی کنیم، چندجمله‌ای درجه صفر $p_0(\mathrm{t})=f(t_n,y_n)$ حاصل می‌شود که با جایگذاری در رابطه‌ی (I) فرمول آدامز ـ بشفورث بدست می‌آید:

$$y_{n+1}^{(p)}=y_n+f(t_n,y_n)h_n,\qquad h_n=t_{n+1}-t_n$$

حال اگر $f(t,y(t))$ را در نقطه‌ی t_{n+1} درونیابی کنیم، چندجمله‌ای درجه صفر $p_0(\mathrm{t})=f(t_{n+1},y_{n+1})$ حاصل می‌شود که با جایگذاری در رابطه‌ی (I) فرمول آدامز ـ مولتون بدست می‌آید:

$$y_{n+1}^{(c)} = y_n + f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(p)})h_n, \qquad h_n = t_{n+1} - t_n$$

ب)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_{n+1}^{(p)} + \dfrac{h^2}{2} y^{(2)}(\eta_1) & \eta_1 \in [t_n, t_n + h] \\ y_{n+1} = y_{n+1}^{(c)} - \dfrac{h^2}{2} y^{(2)}(\eta_2) & \eta_2 \in [t_n, t_n + h] \end{cases} \Rightarrow \left| y_{n+1}^{(p)} - y_{n+1}^{(c)} \right| \approx h^2 \left| y^{(2)}(\eta) \right| \qquad \eta \in [t_n, t_n + h]$$

پ)

$$\left| y_{n+1}^{(c)} - y_{n+1} \right| = \frac{1}{2} h^2 \left| y^{(2)}(\eta_2) \right| \approx \frac{1}{2} \left| y_{n+1}^{(c)} - y_{n+1}^{(p)} \right|$$

مساله ۸)

الف)

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow \frac{-2}{4}R_1 + R_3]{R_2 \leftarrow \frac{-2}{4}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ \dfrac{2}{4} & \boxed{-4} & 16 \\ \dfrac{2}{4} & -1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{-1}{4}R_2 + R_2} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ \dfrac{2}{4} & -4 & 16 \\ \dfrac{2}{4} & \dfrac{-1}{-4} & 8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{4} & 1 & 0 \\ \dfrac{2}{4} & \dfrac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

ب)

ابتدا دستگاه $Ly = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4.5 \end{bmatrix}$ را با جایگذاری پیشرو حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ \dfrac{1}{2} y_1 + y_2 = -1 \\ \dfrac{1}{2} y_1 + \dfrac{1}{4} y_2 + y_3 = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

حال دستگاه $Ux = y$ را با جایگذاری پیشرو حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 2 \\ -4x_2 + 16x_3 = -2 \\ 8x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{17}{4} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

مساله ۹)

از رابطه‌ی خطای درونیابی داریم:

$$f(x) - p_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

با توجه به نمایش نیوتن از چندجمله‌ای درونیاب و این‌که $f^{(n)}(\xi) = n!$ داریم:

$$x^n - f[x_1] - f[x_1, x_2](x - x_1) - \cdots - f[x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) = \frac{n!}{n!}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

توجه داریم که ضریب x^{n-1} در سمت چپ تساوی فوق برابر است با: $-f[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

به‌علاوه ضریب x^{n-1} در سمت راست تساوی فوق برابر است با: $-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

در نتیجه: $f[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

مساله ۱۰)

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & 0 \le x \le 1 \\ S_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

معادلات مربوطه به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} S(0) = 1 \\ S(1) = 2 \\ S(2) = 5 \\ S_1(1) = S_2(1) \\ S_1'(1) = S_2'(1) \\ S_1''(1) = S_2''(1) \\ S_1''(0) = 0 \\ S_2''(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = 5 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ 2a_2 + 6a_3 = 2b_2 + 6b_3 \\ 2a_2 = 0 \\ 2b_2 + 12b_3 = 0 \end{cases}$$